Dr. Daniel Joaquin

# 2do Parcial de Álgebra

HOJA N° L.T.S

FECHA 01/11/2010

1. Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo, $n \in \mathbb{Z}^+$, $V$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una base ordenada de $V$. Demuestre que $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\} \subset V$ es una base de $V$, sí y sólo sí, $\{(u_1)_B, (u_2)_B, \ldots, (u_n)_B\}$ es una base de $\mathbb{K}^n$

2. Sea $V$ un espacio con producto interno de dimensión finita y $W$ un subespacio de $V$. Si $W^\perp$ es el complemento ortogonal de $W$. Demuestre que $W \oplus W^\perp = V$

3. Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo, $n \in \mathbb{Z}^+$ y $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$.
   a) Defina vector propio de $A$
   b) Demuestre que si $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, $A$ tiene una base que consta de vectores propios. Entonces $A$ es diagonalizable.

4. Sea $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$ con el producto interno $(A/B) = \sum_{i,j}^{2} a_{ij} b_{ij}$ con $A = |a_{ij}|$ y $B = |b_{ij}|$

Halle el Complemento Ortogonal de $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \right\}$, caracterizando sus vectores y dando una base del mismo.

5. Sea $V = \mathbb{R}_2[X]$ y sean $B$ y $B'$ bases ordenadas de $V$.

Sí $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ es la Matriz de Cambio de Base de $B$ a $B'$ y

$B = \{1 - x^2, x + x^2, 1 + 2x + x^2\}$. Se pide:

   a) La Base $B'$  b) Si $(q)_{B'} = (1, 0, 7)$ determinar el vector $q$

6. Si $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$. Determinar los Valores propios y subespacios propios de $A$. En caso de ser $A$ "diagonalizable", halle una matriz inversible $P$ tal que, $P^{-1}AP$, es una matriz diagonal.

NOTA: En 4. $\rightarrow (A/B) = Tr(A \cdot B^t)$ La traza de, $A$ por $B$ transpuesta.