Álgebra Lineal

Facultad de Ciencias Exactas Físicas y Naturales
Universidad Nacional de Córdoba

Apellido y Nombre: **Matrícula:**
Carrera: **Comisión: Común 2.2**

PARCIAL 1 **TEMA A** **NOTA:**

JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS

1. (a) Defina espacio vectorial.
   (b) Sean V un k-espacio vectorial, $v_1, \dots, v_n$ vectores de V y W el conjunto de todas las combinaciones lineales de $v_1, \dots, v_n$. Probar que
      i. W es un subespacio de V.
      ii. $v_1, \dots, v_n$ son vectores de W.
2. (a) Defina independencia lineal y dependencia lineal de vectores de un espacio vectorial.
   (b) Sean V un k-espacio vectorial y $v_1, \dots, v_n$ vectores de V. Pruebe que si $v_1, \dots, v_n$ son linealmente independientes y $u \notin \langle v_1, \dots, v_n \rangle$, entonces $v_1, \dots, v_n, u$ son linealmente independientes.
3. (a) Defina suma directa de subespacios.
   (b) Sea V un k-espacio vectorial y W_1, W_2 dos subespacios de V. Pruebe que la suma $W_1 + W_2$ es directa si y sólo si $W_1 \cap W_2 = \{0\}$.
4. Dados los siguientes subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$:
$$W_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 |\ x_1 = x_2, x_2 = 2x_3\},$$
$$W_2 = \{(4\alpha, \alpha + \beta, \alpha - \beta) \in \mathbb{R}^3 |\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$
   (a) Defina mediante un sistema de ecuaciones lineales homogéneo el subespacio $W_1 \cap W_2$, de una base del mismo y calcule su dimensión.
   (b) Dedina mediante un sistema de ecuaciones lineales homogéneo el subespacio $W_1 + W_2$, de una base del mismo y calcule su dimensión.
   (c) Comprobar si se verifica que $W_1 \oplus W_2 = \mathbb{R}^3$.
5. (a) Determine para qué valores de a los vectores $(-1, 0, -1), (2, 1, 2), (1, 1, a)$ de $\mathbb{R}^3$ son linealmente dependientes.
   (b) Determine una base de $\mathbb{R}^4$ que incluya a los vectores $(1, 0, 1, 0), (0, 1, -1, 0)$.
6. Determine un subespacio complementario del subespacio de $\mathbb{R}^3$ dado por
$$W = \{(a, a + b, -a) \in \mathbb{R}^3 |\ a, b \in \mathbb{R}\}.$$